



Unidad TR.7: Inversas de Funciones Trigonómicas
Matemáticas
5 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)	
Resumen de la Unidad:	El estudiante aprenderá sobre funciones trigonométricas inversas y las aplicará para resolver problemas con triángulos rectángulos.
Preguntas Esenciales (PE) y Comprensión Duradera (CD)	
<p>PE1 ¿Cómo se relaciona la propiedad de ser uno a uno a la invertibilidad? CD1 Las funciones solo son invertibles si son uno a uno.</p> <p>PE2 ¿Cuándo es una función trigonométrica invertible? CD2 Las funciones trigonométricas solo son invertibles cuando tú restringes su dominio.</p> <p>PE3 ¿De qué manera se usan las funciones trigonométricas inversas para resolver triángulos? CD3 Las funciones trigonométricas inversas nos pueden ayudar a resolver triángulos.</p>	
Objetivos de Transferencia (T) y Adquisición (A)	
<p>T1. El estudiante podrá invertir funciones trigonométricas para resolver triángulos.</p> <p><i>El estudiante adquiere destrezas para...</i></p> <p>A1. Entender cómo se pueden usar las funciones inversas para resolver ecuaciones.</p> <p>A2. Entender cuando una función es invertible al mirar su gráfica.</p> <p>A3. Entender el dominio en el cual la función trigonométrica es invertible.</p> <p>A4. Utilizar funciones trigonométricas para resolver triángulos.</p>	
Los Estándares de Puerto Rico (PRCS)	
Estándar de Geometría	
ES.G.33.3	Utilizar razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras para resolver triángulos rectángulos en problemas aplicados.
Estándar de Funciones	



Unidad TR.7: Inversas de Funciones Trigonómicas
Matemáticas
5 semanas de instrucción

(+) ES.F.26.4	Produce una función invertible a partir de una función no invertible, al restringir su dominio.
(+)ES.F.29.3	Reconoce que el restringir una función trigonométrica a un dominio en el cual siempre aumenta o siempre disminuye permite construir su inverso.
(+) ES.F.29.4	Utiliza funciones inversas para resolver ecuaciones trigonométricas que resultan al crear modelos; evalúa las soluciones al utilizar la tecnología y las interpreta en términos del contexto.
Procesos y Competencias Fundamentales de Matemáticas (PM)	
PM1	Comprende problemas a medida que desarrolla su capacidad para resolverlos con confianza.
PM2	Razona de manera concreta y semiconcreta, hasta alcanzar la abstracción cuantitativa.
PM3	Construye y defiende argumentos viables, así como comprende y critica los argumentos y el razonamiento de otros.
PM4	Utiliza las matemáticas para resolver problemas cotidianos.
PM5	Utiliza las herramientas apropiadas y necesarias (incluye la tecnología) para resolver problemas en diferentes contextos.
PM6	Es preciso en su propio razonamiento y en discusiones con otros.
PM7	Discierne y usa patrones o estructuras.
PM8	Identifica y expresa regularidad en los razonamientos repetidos.



Unidad TR.7: Inversas de Funciones Trigonómicas

Matemáticas

5 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de contenido <i>(El estudiante comprenderá...)</i>	Dominio y destrezas <i>(El estudiante podrá...)</i>	Tareas de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección
<p>PRCS: ES.G.33.3 (+) ES.F.26.4 (+) ES.F.29.3 (+) ES.F.29.4</p> <p>PM: PM1 PM2 PM4 PM5 PM6 PM7</p> <p>PE/CD: PE1/CD1 PE2/CD2 PE3/CD3</p> <p>T/A: A1/A2/A3/A4</p>	<ul style="list-style-type: none"> Cómo identificar la propiedad de ser una función de uno a uno. La diferencia si una función es uno a uno basándose en su gráfica. Cómo defender que una función es invertible si y solo si es uno a uno en su dominio. Que al restringir una función trigonométrica a un dominio en el cual siempre aumenta o siempre disminuye permite construir su inverso. Cómo demostrar conocimiento de funciones inversas. Cómo utilizar funciones trigonométricas inversas para resolver triángulos. 	<p><i>Patrones y relaciones</i> <i>Formas geométricas</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Utilizar los dominios restringidos en el cual siempre es creciente o decreciente de las funciones seno, coseno y tangente para poder definir y construir sus inversas al establecerse una relación biunívoca: arcoseno, arcos, arctan. Producir función trigonométrica invertible a partir de una función no invertible al restringir su dominio. Calcular los valores de las 	<p><i>Para obtener descripciones completas, favor de ver la sección "Tareas de desempeño" al final de este mapa.</i></p> <p>Explorar Gráficas de Funciones Trigonómicas Inversas</p> <ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes usan herramientas en línea para explorar las gráficas de funciones trigonométricas inversas. (ver abajo) <p>(Fuente: http://www.carlisleschools.org/webpages/wolfer/files/MA%207-3%20Inverses%20Online%20Activity.pdf)</p>	<p>Preguntas de ejemplo para tarea o prueba corta</p> <ul style="list-style-type: none"> Utilizando las ecuaciones a continuación crea una gráfica con el dominio restringido de (-1, 1) y una gráfica con el dominio restringido de todos los números reales. <ul style="list-style-type: none"> $y = \text{Sen}^{-1} x$ $y = \text{Cos}^{-1} x$ $y = \text{Tan}^{-1} x$ Traza la gráfica de $y = \text{sen } x$ desde -4π hasta 4π. <ol style="list-style-type: none"> ¿Pasa la gráfica la prueba de la línea vertical? Ahora refleja $y = \text{sen } x$ por la línea $y = x$. ¿Es esto una función? ¿Por qué? Halla una sección de la gráfica de seno con el recorrido de $-1 \leq y \leq 1$ y que sea una función de uno a uno. Refleja únicamente la sección con el dominio restringido por la línea $y = x$. ¿Pasa la nueva imagen la prueba de la línea vertical? Determina el dominio y recorrido de la imagen. <p>(Fuente: http://www.amaps.org/leftfiles/Syllabi/Algebra%202%20Sample%20Tasks.pdf)</p> <ul style="list-style-type: none"> Dado un triángulo recto cuyos lados miden 3, 4 y 5, use las funciones trigonométricas inversas 	<p><i>Para obtener descripciones completas, ver las secciones "Actividades de aprendizaje" y "Ejemplos para planes de la lección" al final de este mapa.</i></p> <p>Funciones trigonométricas uno a uno</p> <ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes estudiarán funciones trigonométricas inversas y determinarán dominios en los cuales las funciones trigonométricas son invertibles. (ver abajo) <p>(Fuente: www.curriculumframer.com)</p> <p>Tres funciones trigonométricas inversas</p> <ul style="list-style-type: none"> En esta actividad, le explicarás a los estudiantes las funciones trigonométricas inversas para funciones de seno, coseno y tangente, su dominio y recorrido. (ver abajo) <p>Ejemplo 1 para planes de la lección: Cómo cambiar el dominio de una ecuación trigonométrica</p> <ul style="list-style-type: none"> En esta lección, los estudiantes cambiarán el dominio de ecuaciones trigonométricas con una practica guiada. (ver anejo: "TR. 7 Ejemplo para plan de la lección: Cómo cambiar el dominio de una ecuación trigonométrica") <p>(Fuente: http://www.wsfcs.k12.nc.us/Page/7246)</p>



Unidad TR.7: Inversas de Funciones Trigonómicas
Matemáticas
5 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de contenido (El estudiante comprenderá...)	Dominio y destrezas (El estudiante podrá...)	Tareas de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección
		<p>funciones trigonométricas inversas con y sin tecnología.</p> <ul style="list-style-type: none"> Definir y trazar la gráfica de las funciones trigonométricas en el mismo sistema de ejes con sus funciones inversas con dominios restringidos adecuadamente . Utilizar las funciones inversas para resolver ecuaciones trigonométricas. Resolver triángulos rectángulos usando funciones trigonométricas 		<p>para determinar los ángulos del triángulo.</p> <p><i>Diario de matemáticas (preguntas de ejemplo)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Dibuja en tu libreta la gráfica de una función. Determina si esta función es uno a uno, y luego determina si es invertible. Explica con palabras porque estos conceptos están relacionados. Si tu función no es invertible, encuentra un dominio que puedas restringir para que se vuelva invertible. <p><i>Papelito de entrada (ejemplos rápidos)</i></p> <p>Use la información para orientar la clase del día.</p> <ul style="list-style-type: none"> Explica una idea que recuerdes de la clase anterior. Nombra una idea que no comprendiste de la tarea para hoy. Explica que fue difícil (o fácil) de la tarea asignada para hoy. <p><i>Papelito de salida (ejemplos rápidos)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> En la clase de hoy aprendí _____. Hoy estuve confundido con _____. 	



Unidad TR.7: Inversas de Funciones Trigonómicas
Matemáticas
5 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de contenido <i>(El estudiante comprenderá...)</i>	Dominio y destrezas <i>(El estudiante podrá...)</i>	Tareas de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección
		inversas y usar los resultados para resolver problemas aplicados concretos.			
Vocabulario de Contenido					
	<ul style="list-style-type: none"> • Inverso • Invertible • Uno a uno • Dominio Restringido 	<ul style="list-style-type: none"> • Arcsen (Arcoseno) • Arcos • Arctan (Arcotangente) • Arccos(arcocoseno) • Función trigonométrica inversa 			



Unidad TR.7: Inversas de Funciones Trigonómicas
Matemáticas
5 semanas de instrucción

ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)

Conexiones a la literatura sugeridas

- **Martin Plimmer**
 - *Más allá de la coincidencia*
- **Juan Carlos Arce**
 - *El matemático del rey*
- **Eli Maor**
 - *Trigonometric Delights*
- **Ian Stewart**
 - *Letters of a Young Mathematician*

Recursos adicionales

- [http://www.wikimatematica.org/index.php?title=Funciones Trigonómicas y sus inversas](http://www.wikimatematica.org/index.php?title=Funciones_Trigonom%C3%A9tricas_y_sus_inversas)
- <http://www.scribd.com/doc/4607532/FUNCIONES-TRIGONOMETRICAS-INVERSAS>



Unidad TR.7: Inversas de Funciones Trigonómicas
Matemáticas
5 semanas de instrucción

Tareas de desempeño

Nota: Utilice los documentos: 1) estrategias de educación diferenciada para estudiantes del Programa de Educación Especial o Rehabilitación Vocacional y 2) estrategias de educación diferenciada para estudiantes del Programa de Limitaciones Lingüísticas en Español e inmigrantes (Titulo III) para adaptar las actividades, tareas de desempeño y otras evidencias para los estudiantes de estos subgrupos.

Explorar Gráficas de Funciones Trigonómicas Inversas

- Pase la hoja de trabajo (ver anejo: “TR. 7 Tarea de desempeño Explorar Gráficas de Funciones Inversas”). Los estudiantes usarán recursos en línea para visualizar funciones trigonométricas inversas y completar la hoja de trabajo.

Rúbrica

- Experto: Todas las respuestas son correctas y las gráficas y explicaciones son claras.
- Competente: 80% -90% of de las respuestas están correctas.
- Básico: menos del 80% de las respuestas están correctas.

(Fuente: <http://www.carliseschools.org/webpages/wolfer/files/MA%207-3%20Inverses%20Online%20Activity.pdf>)



Unidad TR.7: Inversas de Funciones Trigonómicas

Matemáticas

5 semanas de instrucción

Actividades de aprendizaje sugeridas

Funciones trigonométricas uno a uno

- Los estudiantes utilizarán el estudio previo de las funciones inversas para comprender que las funciones trigonométricas no tienen inversa a menos que restrinjamos su dominio. Primero, pídeles a los estudiantes que tracen la gráfica de $y = \sin x$. ¿Cómo sabemos que se trata de una función? A continuación, pregúntales: ¿es una función uno a uno? ¿Tiene una función inversa? Nota importante: No todos los libros de texto son uniformes en cuanto al uso del término *inversa*. Algunos libros utilizan el término *inversa* con el sentido de "función inversa" y señalarán que la inversa no existe si al intercambiar las variables de x y de y se crea una relación que no es una función. Otros libros utilizan el término *inversa* para describir la relación creada por el intercambio de variables, aun cuando no se trata de una función, con lo cual cabe preguntarse "¿es la inversa una función?". Comprueba la terminología del libro de texto que están usando tus estudiantes y guarda la coherencia terminológica con el libro para minimizar la confusión. En este documento, se utilizará el acercamiento anterior; así, el término *inversa* se refiere a que se trata de una función.
- Haz que los estudiantes tracen la gráfica de la relación $x = \sin y$. Obviamente no es una función. Reta a los estudiantes a hallar la porción mayor del $\sin x$ que sea uno a uno. Primero, pídeles que trabajen solos y después compara sus respuestas. ¿Cuán larga es? ¿Hay solo una respuesta posible? ¿Todo intervalo en x posee la calidad de ser uno a uno? Pídeles que hagan lo mismo para el coseno y el seno en parejas. Discútanlo como clase.

(Fuente: www.curriculumframer.com)

Tres funciones trigonométricas inversas

- Explícales las funciones trigonométricas inversas para funciones de seno, coseno y tangente, y su dominio y recorrido. Usa esta actividad para darle seguimiento a las funciones trigonométricas uno a uno. Refiérete a la discusión anterior de las funciones trigonométricas inversas de seno, coseno y tangente y haz hincapié en la diferencia entre $x = \sin$ (hallar todos los ángulos y para los cuales el seno de $y = x$ no sea una función), y $y = \arcsin x$ (hallar el ángulo entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ para el cual el seno de $y = x$). Nota importante: En relación con la nota anterior sobre la falta de uniformidad en el uso del término "inversa", algunos libros diferencian entre "Arcsen x " y "arcsen x ", donde uno es la función y el otro es la no función que equivale a la relación $x = \sin y$. Nuevamente, modifica tus explicaciones en clase para reflejar la convención usada en tu texto. En este documento, usaremos la convención de no poner mayúscula para diferenciar el uso, y $\arcsin x$ se referirá a la función con recorrido restringido, o "ángulo principal". Muéstrales a los estudiantes ambas convenciones para la escritura de funciones trigonométricas inversas: el uso de "arco-" y el uso del índice superior "-1". Haz hincapié en que no se trata de un exponente, y contrástalo con colocar $\sin x$ entre paréntesis con el exponente afuera como la forma correcta de elevar el seno a la potencia negativo uno. Modela ejemplos y pídeles a los estudiantes que practiquen usando los ejemplos para comprobar su habilidad para usar las funciones trigonométricas inversas básicas (seno, coseno y tangente inversos). No les pidas que hallen la inversa de la cosecante, secante y cotangente; esto se discutirá en la próxima actividad.

(Fuente: www.curriculumframer.com)